Liceo Scientifico "E. Fermi"

Anno scolastico: 2021-22

Simulazione della II prova dell'esame di Stato

Tema: Matematica

Data: 10–Maggio–2022 **Classe:** V ... **Durata della prova:** 5 ore

Cognome e nome del candidato: ....

Il candidato indichi il numero del problema e dei quesiti scelti per la correzione:

Problema: ...... Quesito: ...... Quesito: ...... Quesito: ...... Quesito: ......

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a quattro dei quesiti del questionario. [1]

Problema 1 Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{x^2}{|x+1|+m}$ con m parametro reale.

a) Si trovi il valore del parametro reale m per il quale la funzione ammette come asintoto obliquo destro la retta di equazione $y = x - 2$.

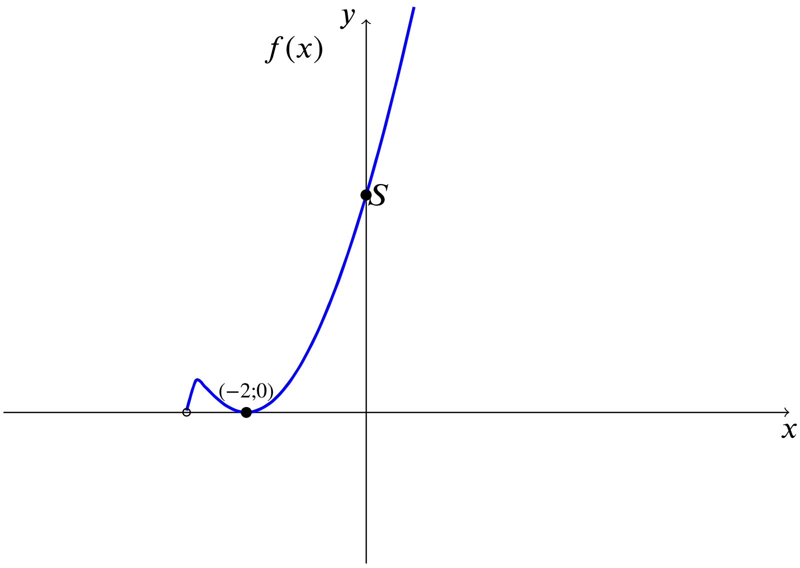
b) Dopo aver verificato che risulta $m = 1$, si studi in modo completo la funzione così ottenuta e si disegni il grafico Γ della funzione f; si individui quindi il più ampio intervallo in cui è applicabile il teorema di Rolle alla funzione, *motivando la scelta fatta*.

c) Detta r la retta di equazione $y = x + 2$, si calcoli l'area della regione finita di piano compresa tra la retta r, l'asse delle ordinate ed il grafico Γ della funzione f.

d) Si deduca, a partire dal grafico Γ, il grafico Φ della funzione $g(x) = \ln(f(x))$ illustrando il procedimento seguito.
Sia $I_k = \int_{-1}^{k} g(x)\,dx$, con $k \in [-1;0[$: si calcoli il $\lim_{k\to 0^-} I_k$ e si fornisca un'interpretazione geometrica del risultato ottenuto.

[1] Consentito l'uso della calcolatrice grafica non CAS.

Problema 2 –



Il grafico in figura rappresenta una funzione del tipo:

$$f(x) = (x+k)\ln^2(x+k), \qquad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

a) Si determini il/i valore/i di k per il/i quale/i la funzione è rappresentata dal grafico, motivando la risposta.

Posto $k = 3$, si trovi il dominio di $f(x)$ e si verifichi *analiticamente* il comportamento della funzione negli estremi del dominio, si studi il segno delle derivate e si determinino gli estremanti della funzione e i punti di flesso.

b) Sia A il punto di coordinate $(-3; 0)$, P un punto della funzione di ascissa x, con $x \in]-3; -2]$ e H la proiezione di P sull'asse x. Si trovi per quale P l'area del triangolo $\overset{\triangle}{APH}$ è massima.

c) Si ricavi l'equazione della parabola $y = g(x)$ che ha vertice in $(-2; 0)$ e passa per il punto S' posto sull'asse y e che ha come ordinata l'intero piú vicino all'ordinata di S. Si calcoli, nell'intervallo $I[-2; 0]$, l'area della regione di piano delimitata dalla parabola e dall'asse delle x.

Due funzioni si dicono equivalenti per $x \to x_0$, se il limite per $x \to x_0$ del rapporto fra le due funzioni tende ad uno: si mostri che $f(x)$ e $g(x)$ sono equivalenti quando $x \to -2$.

d) Si calcoli poi l'area della parte di piano compresa tra la curva $f(x)$ e l'asse x nell'intervallo I, operando la sostituzione $t = x + 3$.

Quale errore percentuale si commette in questo calcolo approssimando la f con la g?

Quesito 1 Si enunci il teorema di De L'Hopital.

Si spieghi in modo chiaro se è possibile applicare il teorema di De L'Hopital per calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x+\sin 3x} \qquad\qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{\sin 5x}{x+\sin 3x}$$

Si calcolino i limiti.

Quesito 2 Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \left|x^2 - 2x\right|$$

a. Si verifichi che è simmetrica rispetto alla retta $x = 1$.

b. Si determini il valore esatto dell'angolo formato dalle coppie di rette tangenti al grafico della funzione nei suoi punti angolosi.

Quesito 3 Si consideri la funzione $f : [-2; 2] \to \mathbb{R}$ di equazione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{se} \quad -2 \le x \le 1 \\ x^3 + b & \text{se} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$$

Si determini per quali valori dei parametri reali a e b sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Successivamente si determini il/i punto/i di cui il teorema garantisce l'esistenza.

Quesito 4 Si determini per quali valori dei parametri reali a e b il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{ax^2 + b} + x$$

ammette come asintoto obliquo per $x \to -\infty$ la retta di equazione $y = \frac{1}{2}x$.

Quesito 5 È dato il quadrato di vertici $A(1; 0)$, $B(1; 1)$, $C(0; 1)$ e $O(0; 0)$. Determina la cubica $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tale che passi per O e B, abbia in $x = 0$ derivata nulla e tale che l'area della parte inferiore in cui il quadrato è diviso dal grafico di f sia $\frac{1}{2}$.

Quesito 6 Date due circonferenze di raggi $R = 5$ e $r = 2$ tangenti internamente, condurre una perpendicolare alla retta dei centri in modo che risulti massima la somma dei quadrati delle corde che le due circonferenze staccano sulla perpendicolare.

Quesito 7 Si verifichi che le curve di equazioni $f(x) = 1 + \ln(2x + 3)$ e $g(x) = \sqrt{4x + 5}$ sono tra loro tangenti e si scrivano le coordinate del loro punto comune e l'equazione della tangente comune.

Quesito 8 Si consideri la curva γ di equazione $y = -x^2 + 4x$ e il fascio di rette di equazione $y = mx$, con $m \in \mathbb{R}$. Si ricavino i valori di m per i quali la corrispondente retta del fascio e la curva γ delimitano una regione piana di area $\frac{9}{16}$.